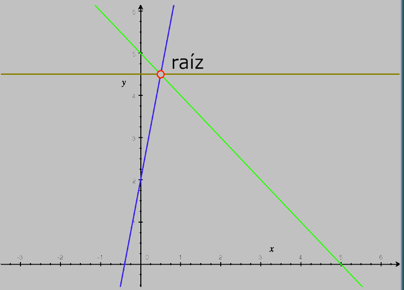

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$z_i = y_i - \left[\sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} z_j \right]$$

Universidad Autónoma del Estado de México
Centro Universitario UAEM Zumpango

Ingeniería en Computación

Cálculo Numérico

Unidad de Competencia III
Sistemas Lineales, Tema 2
Método de Gauss-Jordan

M. en C. Rafael Rojas Hernández
rrojas.uaemex@gmail.com

septiembre, 2018

Estructura de la Unidad de Aprendizaje

1. Análisis de error
2. Raíces de ecuaciones lineales
3. **Sistemas Lineales**
4. Diferenciación e Integración
5. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Objetivo de la Unidad de Competencia

Aplicar los métodos numéricos al construir algoritmos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Conocimientos

- Utiliza los métodos de Eliminación Gaussiana, Factorización de LU e iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Diseña aplicaciones de software para encontrar soluciones de ecuaciones lineales por los métodos aprendidos.
- Selecciona el método más adecuado para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Habilidades

- Utiliza aplicaciones de software para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Soluciona problemas prácticos modelados sistemas de ecuaciones lineales.

Actitudes y valores

Selecciona métodos apropiados.
Explica conceptos.
Propone soluciones.
Resuelve problemas.
Pone en práctica los conocimientos adquiridos.
Actúa conforme a un plan.

Es una variante de la eliminación de Gauss y comparte con ésta el proceso de eliminación hacia adelante, pero difiere en el proceso hacia atrás, el cual recibe el nombre *eliminación hacia atrás*.

Partimos de que la eliminación hacia atrás convierte en 1 a los coeficientes en la posición de pivoteo y elimina los demás. Primero se divide el último renglón entre a_{nn}^{n-1} para obtener:

$$0\ 0\ 0\ 1\ \bar{b_n}$$

donde $\bar{b_n} = b_n^{n-1}/b_{nn}^{n-1}$

Los n-ésimos coeficientes de cada renglón, excepto el último se eliminan restando el último renglón multiplicado por el n-ésimo coeficiente al i-ésimo renglón:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 & \bar{b}_1 \\
0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n-1} & 0 & \bar{b}_2 \\
0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3,n-1} & 0 & \bar{b}_3 \\
 & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a^{n-2}_{n-1,n-1} & 0 & \bar{b}_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{b}_n
\end{array}
$$

donde $\bar{b}_i = b_i^{i-1} - a_{i,n}^{i-1}\bar{b}_n$.

Los $(n-1)$-ésimos coeficientes de todos los renglones arriba del $(n-1)$-ésimo renglón se eliminan restando el $(n-1)$-ésimo renglón multiplicado por el $(n-1)$-ésimo coeficiente al renglón que se eliminará:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}'_1 \\
0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}'_2 \\
0 & 0 & a''_{33} & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}'_3 \\
 & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bar{b}'_{\underline{n}-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{b}_n
\end{array}
$$

Al repetir el proceso de eliminación, el arreglo queda finalmente:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_1^{n-1} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_2^{n-2} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_3^{n-3} \\
 & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}'_{\underline{n}-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{b}_n
\end{array}$$

Se puede observar que todos los coeficientes son iguales a cero, excepto los pivotes, que valen 1; además de que cada renglón se interpreta como:

$$x_i = \bar{b}_i^{n-i}$$

es decir, la columna de la extrema derecha es la solución final.

Ejemplo 1: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{gathered} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{gathered}$$

De forma matricial se representa.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Se tiene que llegar a tener una matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ \square & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ \square & \square & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{gathered} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{gathered}$$

De forma matricial se representa.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Se tiene que llegar a tener una matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ \square & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ \square & \square & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Ejemplo 1: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{gathered} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{gathered}$$

De forma matricial se representa.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Se tiene que llegar a tener una matriz de la forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ \square & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ \square & \square & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Hacer que la diagonal principal tenga los valores mayores, intercambiar fila 1 por fila 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to (f3 \leftrightarrow f1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Para lograr los ceros en la primera columna debajo de la diagonal principal; multiplicar por 3 la fila 1 y restarla a la fila 2, y multiplicar por 5 la fila 1 y restarla a la fila 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c} f2 - 3f1 \\ f3 - 5f1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right)$$

Hacer que la diagonal principal tenga los valores mayores, intercambiar fila 1 por fila 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow (f3 \leftrightarrow f1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Para lograr los ceros en la primera columna debajo de la diagonal principal; multiplicar por 3 la fila 1 y restarla a la fila 2, y multiplicar por 5 la fila 1 y restarla a la fila 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} f2 - 3f1 \\ f3 - 5f1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right)$$

Ahora es necesario hacer los ceros de la segunda columna; multiplicar por 2 la fila 2 y restarla a la fila 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right) \rightarrow (f3 - 2f2) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Una vez obtenidos los ceros debajo de la diagonal principal es necesario hacer ceros en la parte superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 4f2 - f3 \\ f1 - (-f3) \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora es necesario hacer los ceros de la segunda columna; multiplicar por 2 la fila 2 y restarla a la fila 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right) \rightarrow (f3 - 2f2) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Una vez obtenidos los ceros debajo de la diagonal principal es necesario hacer ceros en la parte superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 4f2 - f3 \\ f1 - (-f3) \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora es necesario hacer los ceros de la segunda columna; multiplicar por 2 la fila 2 y restarla a la fila 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{array}\right) \rightarrow (f3-2f2) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Una vez obtenidos los ceros debajo de la diagonal principal es necesario hacer ceros en la parte superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 4f2-f3 \\ f1-(-f3) \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para eliminar los ceros de la parte de arriba de la diagonal principal en la segunda columna.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow (\ -f2\ ) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow (\ f1 - f2\ ) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Para eliminar los ceros de la parte de arriba de la diagonal principal en la segunda columna.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to (\ -f2\ ) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to (\ f1 - f2\ ) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Con esto tenemos el sistema de ecuaciones a partir de la matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} x = -4 \\ y = 6 \\ z = 1 \end{array}$$

Ejemplo 2: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -x + y + 3z &= -2 \\ 4x + 2y - z &= 5 \\ 2x + 4y - 7z &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} f2 + 4f1 \\ 2f3 - f2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -13 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} f3 - f3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -24 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplo 2: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}-x + y + 3z &= -2\\ 4x + 2y - z &= 5\\ 2x + 4y - 7z &= 1\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2\\ 4 & 2 & -1 & 5\\ 2 & 4 & -7 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f2+4f1\\ 2f3-f2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 6 & 11 & -3\\ 0 & 6 & -13 & -3\end{array}\right)$$

$$\left(\ f3-f3\ \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 6 & 11 & -3\\ 0 & 0 & -24 & 0\end{array}\right)$$

Ejemplo 2: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f2 + 4f1 \\ 2f3 - f2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -13 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f3 - f3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -24 & 0 \end{array}\right)$$

Ejemplo 2: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{l} -x+y+3z=-2 \\ 4x+2y-z=5 \\ 2x+4y-7z=1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f2+4f1 \\ 2f3-f2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -13 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f3-f3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -24 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\ -\tfrac{1}{24}f3\ \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f1 - 3f3 \\ f2 - 11f3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\ \tfrac{1}{6}f2\ \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\ -\frac{1}{24}f3\ \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\ \begin{array}{c} f1-3f3 \\ f2-11f3 \end{array}\ \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\ \frac{1}{6}f2\ \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\ -\tfrac{1}{24} f3 \ \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f1 - 3f3 \\ f2 - 11f3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\ \tfrac{1}{6} f2 \ \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\ f1 - f2\ \right) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\ -f1\ \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces:

$$x = \frac{3}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}$$
$$z = 0$$

$$\left(\ f1 - f2 \ \right) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\ -f1 \ \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces:

$$x = \frac{3}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}$$
$$z = 0$$

$$\left(\ f1 - f2\ \right) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\ -f1\ \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces:

$$x = \frac{3}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}$$
$$z = 0$$

una versión que resulta ser más fácil de implementar en un método numérico para ser programado se explica a continuación:

- Para cada fila i de la matriz, $i = 1, 2 \ldots, n$
  - Asignar el pivote de cada fila $p = a_{ii}$
  - Dividir cada elemento de la fila i por p
  - Para cada columna de matriz, excepto en la diagonal principal ajustar los valores a cero.
- los valores de las variables x_i con los elementos de la matriz $a_{i(n+1)}$

una versión que resulta ser más fácil de implementar en un método numérico para ser programado se explica a continuación:

- Para cada fila i de la matriz, $i = 1, 2 \ldots, n$
  - Asignar el pivote de cada fila $p = a_{ii}$
  - Dividir cada elemento de la fila i por p
  - Para cada columna de matriz, excepto en la diagonal principal ajustar los valores a cero.
- los valores de las variables x_i con los elementos de la matriz $a_{i(n+1)}$

una versión que resulta ser más fácil de implementar en un método numérico para ser programado se explica a continuación:

- Para cada fila i de la matriz, $i = 1, 2 \ldots, n$
  - Asignar el pivote de cada fila $p = a_{ii}$
  - Dividir cada elemento de la fila i por p
  - Para cada columna de matriz, excepto en la diagonal principal ajustar los valores a cero.
- los valores de las variables x_i con los elementos de la matriz $a_{i(n+1)}$

una versión que resulta ser más fácil de implementar en un método numérico para ser programado se explica a continuación:

- Para cada fila i de la matriz, $i = 1, 2 \ldots, n$
  - Asignar el pivote de cada fila $p = a_{ii}$
  - Dividir cada elemento de la fila i por p
  - Para cada columna de matriz, excepto en la diagonal principal ajustar los valores a cero.
- los valores de las variables x_i con los elementos de la matriz $a_{i(n+1)}$

una versión que resulta ser más fácil de implementar en un método numérico para ser programado se explica a continuación:

- Para cada fila i de la matriz, $i = 1, 2 \ldots, n$
  - Asignar el pivote de cada fila $p = a_{ii}$
  - Dividir cada elemento de la fila i por p
  - Para cada columna de matriz, excepto en la diagonal principal ajustar los valores a cero.
- los valores de las variables x_i con los elementos de la matriz $a_{i(n+1)}$

Algoritmo de Gauss-Jordan

Data: número de incógnitas y ecuaciones n; matriz aumentada $A = (a_{ij})$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n+1$

Result: solución $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única

for $i = 1, \ldots, n$ **do**
- $p = a_{i,i}$;
- **for** $j = i, \ldots, n+1$ **do**
  - $a_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{p}$;
- **for** $k = 1, \ldots, n$ **do**
  - **if** $k \neq i$ **then**
    - $c = a_{k,i}$;
    - **for** $j = 1, \ldots, n+1$ **do**
      - $a_{k,j} = a_{k,j} - c a_{i,j}$;

for $i = 1, \ldots, n$ **do**
- $x_i = a_{i,n+1}$;

Output: Procedimiento terminado x_i

Ejemplo 3: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}-x+y+3z&=-2\\4x+2y-z&=5\\2x+4y-7z&=1\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 3 & -2\\4 & 2 & -1 & 5\\2 & 4 & -7 & 1\end{array}\right)$$

$$(\ -f1\ )\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -3 & 2\\4 & 2 & -1 & 5\\2 & 4 & -7 & 1\end{array}\right)$$

Ejemplo 3: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}-x+y+3z&=-2\\4x+2y-z&=5\\2x+4y-7z&=1\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 3 & -2\\ 4 & 2 & -1 & 5\\ 2 & 4 & -7 & 1\end{array}\right)$$

$$(\ -f1\ )\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -3 & 2\\ 4 & 2 & -1 & 5\\ 2 & 4 & -7 & 1\end{array}\right)$$

Ejemplo 3: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}&-x+y+3z=-2\\&4x+2y-z=5\\&2x+4y-7z=1\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 3 & -2\\ 4 & 2 & -1 & 5\\ 2 & 4 & -7 & 1\end{array}\right)$$

$$(\ -f1\ )\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -3 & 2\\ 4 & 2 & -1 & 5\\ 2 & 4 & -7 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f2-4f1 \\ f3-2f1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{6}f2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f1+f2 \\ f3-6f2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f2-4f1 \\ f3-2f1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{6}f2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f1+f2 \\ f3-6f2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f2 - 4f1 \\ f3 - 2f1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\tfrac{1}{6} f2 \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f1 + f2 \\ f3 - 6f2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\ -\tfrac{1}{12}f2\ \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f2 - \frac{11}{6}f2 \\ f1 + \frac{7}{6}f2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{3}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}$$
$$z = 0$$

$$\left(-\frac{1}{12} f2 \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f2 - \frac{11}{6} f2 \\ f1 + \frac{7}{6} f2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{3}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}$$
$$z = 0$$

$$\left(\ -\frac{1}{12}f2\ \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{6} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 6 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} f2-\frac{11}{6}f2 \\ f1+\frac{7}{6}f2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{3}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}$$
$$z = 0$$

Ejemplo 4 (Sistema indeterminado)
Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ 3x + 5y + 7z &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f2 - f1 \\ f3 - 3f1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Ejemplo 4 (Sistema indeterminado)
Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ x+2y+3z&=0\\ 3x+5y+7z&=1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} f2-f1\\ f3-3f1 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Ejemplo 4 (Sistema indeterminado)
Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ 3x + 5y + 7z &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f2 - f1 \\ f3 - 3f1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$(\; f3 - 2f2 \;) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Este sistema no tiene solución.

$$\left(\ f3 - 2f2\ \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Este sistema no tiene solución.

1. La eliminación hacia adelante de la eliminación de Gauss-Jordan es idéntica a la eliminación de Gauss. Sin embargo, la eliminación de Gauss-Jordan utiliza la eliminación hacia atrás en vez de la sustitución hacia atrás.

Bibliografía

- Chapra, S. C., Canale R.P., *Métodos numéricos para ingenieros con aplicaciones en computadoras personales*, 5a. Edición, México, McGraw-Hill, 2006, ISBN 9780073401102.
- Richard, L. B., *Análisis Numérico*, 7a Edición, México, International Thomson Editores, 2002, ISBN 9706861343.
- Nakamura S., *Métodos numéricos aplicados con software*, México, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1992, ISBN 9688802638
- Nakamura S., *Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB*, 1a Edición, México, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1997, ISBN 9688808601.

Bibliografía

- Nieves H. A., Domínguez S. F., *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*, 1a Edición, México, Compañía editorial Continental S.A. de C.V., 1995, ISBN 9682606292.
- Kincaid D., Cheney, W., *Análisis Numérico*, México, Addison Wesley Iberoamericana, 1994, ISBN 9780201601305.
- Melvin J. M., López J., *Análisis Numérico: Un enfoque práctico*, 3a Edición, México, Compañía editorial Continental S.A. de C.V., ISBN 9682612519.